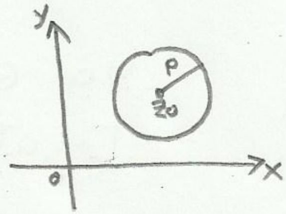
ΜΙΓΑΔΙΚΑ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1) Ποιο το μήκος κύκλου κέντρου $z_0 \in \mathbb{C}$ και ακτίνας ρ;

ΛΥΣΗ

Εαν $C(z_0,\rho)$ κλειστός δίσκος στο μιγαδικό επίπεδο τοτε $\partial C(z_0,\rho)$ είναι το σύνορο αυτού δηλαδή

$$\partial C(z_0,\rho) = \{ z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = \rho \} =$$



$$= \{ z \in \mathbb{C} : z - z_0 = \rho \cdot (\cos t + i \sin t) ,\ t \in [0,2\pi] \} =$$

$$= \{ z \in \mathbb{C} : z = z_0 + \rho \cos t + i \rho \sin t ,\ t \in [0,2\pi] \}$$

Δηλαδή, προκύπτει η καμπύλη:

$$z = z(t) = z_0 + \rho \cos t + i \rho \sin t ,\quad \forall t \in [0,2\pi]$$

Ετσι, το μήκος του κύκλου δίνεται από:

$$M(z(t)) = \int_0^{2\pi} |z'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 \sin^2 t + \rho^2 \cos^2 t}\; dt =$$

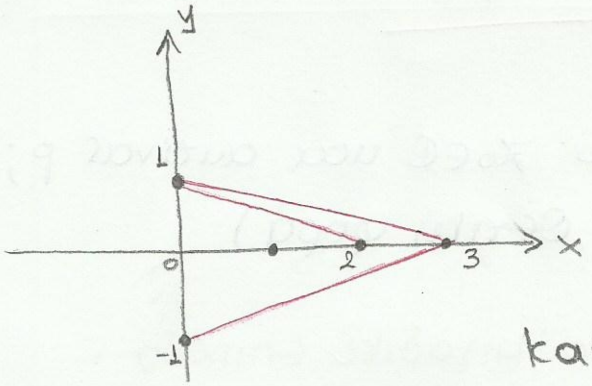
$$= \int_0^{2\pi} \rho \; dt = \rho\,(2\pi - 0) = 2\pi\rho .$$

2) Νδο η καμπύλη (γ) με παραμετρικές μορφές:

$$\left.\begin{array}{ll} (\gamma_1): z_1(t) = -2t + (t+1)i , & t \in [-1,0] \\ (\gamma_2): z_2(t) = 3t + (1-t)i , & t \in (0,1] \\ (\gamma_3): z_3(t) = (6-3t) + (1-t)i , & t \in (1,2] \end{array}\right\} = (\gamma): z(t)$$

είναι κατά τμήματα διαφορίσιμη και να βρεθεί το μήκος των

ΛΥΣΗ



$z_1(-1)=2$, $z_1(0)=i$, $z_2(1)=3$, $z_3(2)=-i$

Αρκεί νδο θα υπάρχει διαμέριση του $[-1,2]$ τέτοια ώστε η z να είναι διαφορίσιμη σε καθένα από τα υποδιαστήματα: $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$ και επιπλέον

να είναι συνεχώς διαφορίσιμη στα διαστήματα $[-1,0]$, $(0,1]$ και $(1,2]$. Έτσι, παίρνουμε:

$z_1'(t)=-2+i$, $t\in[-1,0]$

$z_2'(t)=3-i$, $t\in(0,1]$ (Διαφορίσιμες)

$z_3'(t)=-3-i$, $t\in(1,2]$

και προφανώς συνεχώς διαφορίσιμες στα αντίστοιχα ζητούμενα υποδιαστήματα όπως σταθερές (δίχως να επηρεάζει η παράμετρος t)

Άρα, η $(\gamma)=(\gamma_1)+(\gamma_2)+(\gamma_3)$ δηλ. κατά τμήματα διαφορίσιμη.

Όσο για το μήκος του τόξου, έχουμε:

$$M(z(t))=\int_{-1}^{0}|z_1'(t)|\,dt+\int_{0}^{1}|z_2'(t)|\,dt+\int_{1}^{2}|z_3'(t)|\,dt=$$

$$=\int_{-1}^{0}\sqrt{5}\,dt+\int_{0}^{1}\sqrt{10}\,dt+\int_{1}^{2}\sqrt{10}\,dt=2\sqrt{10}+\sqrt{5}.$$

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_\gamma z^2 dz$$ κατά μήκος της καμπύλης

$(\gamma): z(t)=(t-1)+ti \quad , t\in[1,2]$

ΛΥΣΗ

$$\int_\gamma z^2 dz := \int_1^2 (z(t))^2 \cdot z'(t)\, dt = \int_1^2 ((t-1)+ti)^2 \cdot (1+i)\, dt =$$

$$= \int_1^2 (\cancel{t^2}-2t+1+2t(t-1)i-\cancel{t^2})(1+i)\,dt =$$

$$= (1+i)\int_1^2 \left[(1-2t)+2t(t-1)i\right] dt =$$

$$= (1+i)\left[\int_1^2 (1-2t)\,dt + i\int_1^2 2t(t-1)\,dt\right] =$$

$$= (1+i)\left[t-t^2 \Big|_1^2 + i\left(\frac{2}{3}t^3-t^2\right)\Big|_1^2\right] =$$

$$= (1+i)\left[2-4-\cancel{1}+\cancel{1} + i\left(\frac{2}{3}\cdot 8-4-\frac{2}{3}+1\right)\right] = -\frac{1}{3}(11+i)$$

4) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz$$ κατά μήκος της καμπύλης

$(\gamma): z(t)=t^3-it$ από το $z=0$ έως $z=8-2i$

ΛΥΣΗ

Να θυμηθούμε ότι υπάρχει η εξής σχέση επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων και μιγαδικών συναρτήσεων:

Εάν $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ και $z=x+iy$ τότε

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx+u\,dy)$$

Για αυτό το λόγο θέτω $z=x+iy$

Άρα: $\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_\gamma (x-yi)(dx+i\,dy) = \int_\gamma (x\,dx+y\,dy) + i\int_\gamma (x\,dy-y\,dx)$

Επίσης, $z(t)=t^3-it$ άρα οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης (γ) είναι: $x=x(t)=t^3$ & $y=y(t)=-t$

Έτσι, για $z=0 \rightarrow t=0$ και για $z=8-2i \rightarrow t=2$

Άρα, προκύπτει

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^2 \left(t^3\cdot 3t^2\,dt - t(-dt)\right) + i\int_0^2 \left(t^3(-dt) + t\cdot 3t^2\,dt\right) =$$

$$= \int_0^2 (3t^5+t)\,dt + i\int_0^2 2t^3\,dt = 34+8i$$

Σαφώς και θα μπορούσαμε να τη λύσουμε με τον ορισμό του επικαμπυλίου:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_0^2 (t^3+it)(3t^2-i)\,dt = \dots = 34+8i$$

5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$\int_\gamma z^2\,dz$ κατά μήκος της ευθείας που συνδέει το σημείο $1-i$ με το σημείο $2+3i$

ΛΥΣΗ

Αρκεί να βρεθεί η παραμετρική εξίσωση της ευθείας που ενώνει τα σημεία $1-i$ και $2+3i$.

$1-i \rightarrow (1,-1)$ και $2+3i \rightarrow (2,3)$

Άρα, $y+1 = \frac{3+1}{2-1}(x-1) \Rightarrow y=4x-5$

Άρα, η παραμετρική εξίσωση της εν λόγω ευθείας είναι η εξής: $z(t) = \underbrace{t}_{x(t)} + \underbrace{(4t-5)}_{y(t)}i = x(t)+y(t)i, \; \forall t\in[1,2]$

(αφού $z=1-i \rightsquigarrow t=1$ και $z=2+3i \rightsquigarrow t=2$)

Άρα, παίρνουμε:

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_1^2 z^2(t)\cdot z'(t)\,dt = \int_1^2 (t+(4t-5)i)^2\cdot(1+4i)\,dt =$$

$$= \int_1^2 (t^2+2it(4t-5)-(4t-5)^2)(1+4i)\,dt =$$

$$= (1+4i)\int_1^2 \left[(-15t^2+40t-25)+i(8t^2-10)\right]dt =$$

$$= (1+4i)\left[\int_1^2 (-15t^2+40t-25)\,dt + i\int_1^2 (8t^2-10)\,dt\right] =$$

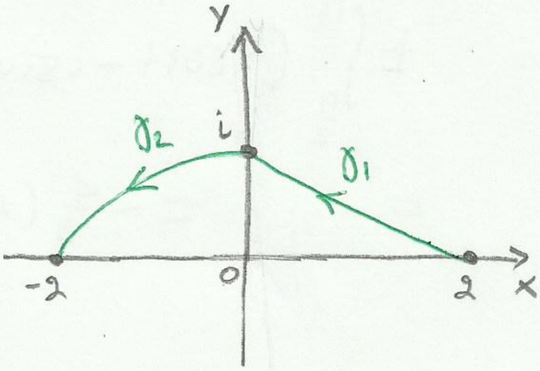
$$= \cdots = -\frac{44}{3}+\frac{11}{3}i$$

6) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$\int_\gamma \bar{z}^2 dz$ κατά μήκος της καμπύλης γ

όπου γ: θετικά προσανατολισμένη καμπύλη που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $2, i$ και το τμήμα της έλλειψης: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ με άκρα i και -2.

ΛΥΣΗ



Η (γ) είναι μια κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη και άρα:

$$\int_\gamma \bar{z}^2 dz = \int_{\gamma_1} \bar{z}^2 dz + \int_{\gamma_2} \bar{z}^2 dz \quad (1)$$

- Η γ_1 έχει καρτεσιανή εξίσωση:

$x+2y=2 \Rightarrow x=2-2y$

Άρα, η παραμετρική εξίσωση της ευθείας είναι:

$z(t) = x(t) + iy(t) = (2-2t) + ti \quad \forall\, t \in [0,1]$

(αφού $z=2 \to t=0$ και $z=i \to t=1$)

- Η γ_2 έχει καρτεσιανή εξίσωση:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \xrightarrow[Y=y]{X=\frac{x}{2}} X^2 + Y^2 = 1$$

άρα $Y = \sin t$ και $X = \cos t \Rightarrow \frac{x}{2} = \cos t \Rightarrow x = 2\cos t$

άρα $y = \sin t$ και $x = 2\cos t \quad \forall\, t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

(καταρχάς βλέπουμε ότι διαγράφουμε έλλειψη στο $2^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο αλλά και είναι $z(t) = x(t) + iy(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow z(t) = 2\cos t + i\sin t$ όπου για $z=i$

είναι $\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ και για $z=-2$ είναι

$\sin t = 0 \Rightarrow t = \pi$)

Έτσι, λοιπόν η (1) γίνεται:

$$\int_\gamma \bar{z}^2 dz = \int_0^1 [(-2t+2) - ti]^2 (-2+i)\,dt +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2\cos t - i\sin t)^2 (-2\sin t + i\cos t)\,dt =$$

$$= \dots = -\frac{4}{3}(1+2i)$$

7) Ν δο

$$\left|\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z^3+1}\,dz\right| < \frac{3\pi}{4}e^6$$

ΛΥΣΗ

Έστω $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{z^3+1}$ και θα αναζητήσουμε το άνω φράγμα αυτής.

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{2z}}{z^3+1}\right| = \frac{|e^{2z}|}{|z^3+1|} \quad ①$$

$$|e^{2z}| = e^{2\,Re(z)} \leq e^{2|z|} \quad ②$$

$$|z^3+1| \geq |z^3|-1 \Rightarrow \frac{1}{|z^3+1|} \leq \frac{1}{|z|^3-1} \quad ③$$

Άρα, από ② + ③ η ① γίνεται:

$$|f(z)| \leq \frac{e^{2|z|}}{|z|^3-1} \overset{|z|=3}{=\!=} \frac{e^6}{26}.$$

Έτσι,

$$\left|\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z^3+1}\,dz\right| \overset{\text{θεώρημα}}{\leq} \frac{e^6}{26}\cdot \underset{\substack{\text{μήκος τόξου του} \\ \text{κύκλου ακτίνας 3}}}{\mu(\gamma)} = \frac{e^6}{\cancel{26}}\,2\pi\cdot 3 = 3\pi\frac{e^6}{13} < \frac{3\pi}{4}e^6.$$